BINARY BASIC SPLINES OF THE SECOND ORDER

S.F. Lukomskii, M.D. Myshko

We define binary basic splines of the second order, indicate an algorithm for constructing an interpolation polynomial of the second degree, and give an estimated deviation of the interpolation polynomial. We also prove that the constructed basic spline is a solution of some refinement equation.

Keywords: binary basic spline, interpolation polynomial, refinement equation.

УДК 517.982

ЭКСТРАПОЛЯЦИОННЫЕ СВОЙСТВА ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ШКАЛ

К.В. Лыков[1]

1 *alkv@list.ru*; Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева

В статье описывается связь между интерполяционными и экстраполяционными конструкциями. Показано, что для некоторого класса интерполяционных пространств, получаемых $\mathscr{K}$-методом вещественной интерполяции, имеет место также и экстраполяционное описание, получаемое заменой в интерполяционной конструкции $\mathscr{K}$-функционала на параметризованный набор норм точных интерполяционных пространств с характеристическими функциями t^θ, $\theta \in (0,1)$ (в частности, на набор норм пространств Петре).

Ключевые слова: интерполяционное пространство, интерполяционный функтор, экстраполяционное пространство, пространства Петре, вещественный метод интерполяции.

Предположим, что $\vec{A} = (A_0, A_1)$ — *банахова пара*, т.е. такая пара банаховых пространств, что для некоторого хаусдорфова топологического пространства $\mathscr{T}$ имеют место непрерывные вложения $A_0 \subset \mathscr{T}$ и $A_1 \subset \mathscr{T}$. Тогда для любого элемента $x \in \mathscr{T}$, представимого в виде $x = x_0 + x_1$, где $x_0 \in A_0$ и $x_1 \in A_1$, можно определить $\mathscr{K}$-*функционал*:

$$\mathscr{K}(t,x;\vec{A}) := \inf_{x_0,x_1:\, x_0+x_1=x} (\|x_0\|_{A_0} + t\|x_1\|_{A_1}), \quad t>0.$$

С помощью $\mathscr{K}$-функционала строятся *пространства вещественного $\mathscr{K}$-метода интерполяции*. Если F — банахова решетка измеримых функций на $(0,+\infty)$, то пространство $\vec{A}_F^{\mathscr{K}}$ определяется условием конечности нормы

$$\|x\|_{\vec{A}_F^{\mathscr{K}}} := \left\|\mathscr{K}(t,x;\vec{A})\right\|_F.$$

Частным случаем таких пространств являются *пространства Петре* $\vec{A}_{\theta,q}^{\mathscr{K}}$, $\theta \in (0,1)$, $q \in [1,\infty]$, для которых мы будем использовать следующую норму:

$$\|x\|_{\theta,q} := (q\theta(1-\theta))^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^{+\infty} \left(t^{-\theta}\mathscr{K}(t,x;\vec{A})\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \text{при } q<\infty, \text{ и } \|x\|_{\theta,\infty} := \sup_{0<t<\infty} t^{-\theta}\mathscr{K}(t,x;\vec{A}).$$

Напомним еще, что *интерполяционный функтор* I — это отображение из категории всех банаховых пар в категорию банаховых пространств, обладающее свойством: если линейный оператор T, определенный на $A_0 + A_1$ и принимающий значения в $B_0 + B_1$, ограничен из A_i в B_i, $i = 1,2$, то этот же оператор ограничен из $I(\vec{A})$ в $I(\vec{B})$. Если при этом

$$\|T\|_{I(\vec{A})\to I(\vec{B})} \leqslant \max\{\|T\|_{A_0\to B_0}, \|T\|_{A_1\to B_1}\},$$

то интерполяционный функтор называется *точным*. *Характеристической функцией* интерполяционного функтора называется функция $\rho : t \in (0,\infty) \to (0,\infty)$, определяемая из соотношения

$$I\left(\mathbb{R}, \frac{1}{t}\mathbb{R}\right) = \frac{1}{\rho(t)}\mathbb{R}.$$

Докажем теперь теорему, связывающую интерполяционную и экстраполяционную конструкцию. Запись $\|x\|_1 \asymp \|x\|_2$ для двух норм будет означать, что с некоторой константой $C > 0$, не зависящей от элемента x, выполняются неравенства $C^{-1}\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant C\|x\|_1$ (при этом неопределенность одной из норм означает то же самое и для другой нормы).

Теорема. *Предположим, что $\vec{A} = (A_0, A_1)$ такая банахова пара, что $A_0 \subset A_1$ и $\tilde{A}_0 = A_0$, где $\tilde{A}_0$ — совокупность всех пределов в A_1 ограниченных последовательностей из A_0 (так называемое пополнение по Гальярдо). Пусть X — пространство $\mathcal{K}$-метода вещественной интерполяции:*

$$\|x\|_X := \|\mathcal{K}(t, x; \vec{A})\|_F,$$

и, кроме того, в банаховой решетке F действует ограниченно оператор $S : f(t) \to f(t^2)$. Тогда для любого семейства $\{I_\theta\}_{\theta\in(0,1)}$ точных экстраполяционных функторов с характеристическими функциями $\rho_{I_\theta}(t) = t^\theta$, имеет место экстраполяционное соотношение

$$\|x\|_X \asymp \left\| \|x\|_{I_{\log^{-1} t}(\vec{A})} \cdot \chi_{(e,+\infty)}(t) \right\|_F.$$

Доказательство. Напомним (см. [1, p. 11, (2.10)]), что имеют место следующие вложения

$$\vec{A}^{\mathcal{J}}_{\theta,1} \overset{1}{\subset} I_\theta(\vec{A}) \overset{1}{\subset} \vec{A}^{\mathcal{K}}_{\theta,\infty}.$$

Здесь $\vec{A}^{\mathcal{J}}_{\theta,1}$ — пространство $\mathcal{J}$-метода вещественной интерполяции, определяемое с помощью $\mathcal{J}$-функционала $\mathcal{J}(t, x; \vec{A}) := \max\{\|x\|_{A_0}, t\|x\|_{A_1}\}$ условием конечности нормы

$$\|x\|_{\vec{A}^{\mathcal{J}}_{\theta,1}} := \inf \int_0^\infty t^{-\theta} \mathcal{J}(t, u(t); \vec{A}) \frac{dt}{t} < \infty,$$

где инфимум берется по всем представлениям $a = \int_0^\infty u(t)\frac{dt}{t}$ (сходимость в $A_0 + A_1$) со строго измеримой функцией $u(t) : (0,\infty) \to A_0 \bigcap A_1$ (см. [2, параграф 3.2]).

Покажем сначала, что

$$\vec{A}^{\mathcal{K}}_{\theta,1} \overset{C}{\subset} \vec{A}^{\mathcal{J}}_{\theta,1},$$

с некоторой константой $C > 0$, не зависящей от $\theta \in (0,1)$. Нужное вложение легко получить, используя сильную форму фундаментальной леммы теории интерполяции (см. [3]). Согласно фундаментальной лемме для любого $x \in \vec{A}^{\mathscr{J}}_{\theta,1}$ найдется такое представление $x = \int_0^\infty u(s)\,\frac{ds}{s}$, что

$$\int\limits_0^\infty \min(1,t/s)\mathscr{J}(s,u(s);\vec{A})\,\frac{ds}{s} \leqslant \gamma\mathscr{K}(t,x;\vec{A}),\ \ t>0,$$

с некоторой универсальной константой γ. Для такого представления получаем

$$\|x\|_{\theta,1} = \theta(1-\theta)\int\limits_0^\infty t^{-\theta}\mathscr{K}(t,x;\vec{A})\,\frac{dt}{t} \geqslant \theta(1-\theta)\gamma^{-1}\int\limits_0^\infty t^{-\theta}\int\limits_0^\infty \min(1,t/s)\mathscr{J}(s,u(s);\vec{A})\,\frac{ds}{s}\,\frac{dt}{t}$$

$$\theta(1-\theta)\gamma^{-1}\int\limits_0^\infty \left(\int\limits_0^\infty t^{-\theta}\min(1,t/s)\,\frac{dt}{t}\right)\mathscr{J}(s,u(s);\vec{A})\,\frac{ds}{s}$$

$$\theta(1-\theta)\gamma^{-1}\int\limits_0^\infty \frac{s^{-\theta}}{\theta(1-\theta)}\mathscr{J}(s,u(s);\vec{A})\,\frac{ds}{s} = \gamma^{-1}\int\limits_0^\infty s^{-\theta}\mathscr{J}(s,u(s);\vec{A})\,\frac{ds}{s} \geqslant \gamma^{-1}\|x\|_{\vec{A}^{\mathscr{J}}_{\theta,1}}.$$

Объединяя приведенные выше соображения, приходим к вложениям

$$\vec{A}^{\mathscr{K}}_{\theta,1} \overset{\gamma}{\subset} I_\theta(\vec{A}) \overset{1}{\subset} \vec{A}^{\mathscr{K}}_{\theta,\infty}.$$

Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, что

$$C^{-1}\Big\|\,\|x\|_{\theta(t),1}\cdot\chi_{(e,+\infty)}(t)\Big\|_F \leqslant \|x\|_X \leqslant C\Big\|\,\|x\|_{\theta(t),\infty}\cdot\chi_{(e,+\infty)}(t)\Big\|_F, \quad \text{где } \theta(t) = \log^{-1} t.$$

Отметим, что в силу вложения $A_0 \subset A_1$

$$\|x\|_X \asymp \|\mathscr{K}(t,x;\vec{A})\cdot\chi_{(e,+\infty)}(t)\|_F,$$

и при $\theta = \theta(t) = \log^{-1} t$

$$\|x\|_{\theta,\infty} = \sup_{0<s<\infty} s^{-\theta}\mathscr{K}(s,x;\vec{A}) \geqslant s^{-\theta}\mathscr{K}(s,x;\vec{A})\Big|_{s=t=e^{\frac{1}{\theta}}} = e^{-1}\mathscr{K}(t,x;\vec{A}).$$

Поэтому

$$\Big\|\,\|x\|_{\theta(t),\infty}\cdot\chi_{(e,+\infty)}(t)\Big\|_F \geqslant e^{-1}\|\mathscr{K}(t,x;\vec{A})\cdot\chi_{(e,+\infty)}(t)\|_F \geqslant c\|x\|_X.$$

В силу вложения $A_0 \subset A_1$ имеют место также неравенства

$$\min\{C^{-1},s\}\|x\|_{A_1} \leqslant \mathscr{K}(s,x;\vec{A}) \leqslant s\|x\|_{A_1},$$

где C — константа вложения $A_0 \subset A_1$. Далее,

$$\begin{aligned}\theta(1-\theta)\int\limits_0^e s^{-\theta}\mathscr{K}(s,x;\vec{A})\frac{ds}{s} &\leqslant \theta e^{1-\theta}\|x\|_{A_1} \leqslant \theta e^{1-\theta}\max\left\{C,\frac{1}{e}\right\}\mathscr{K}(e,x;\vec{A})\\ &\leqslant C_1\theta^2\int\limits_e^{+\infty} s^{-\theta}\mathscr{K}(s,x;\vec{A})\frac{ds}{s}\end{aligned}$$

Поэтому

$$\|x\|_{\theta,1} = \theta(1-\theta)\left(\int_0^e s^{-\theta}\mathcal{K}(s,x;\vec{A})\frac{ds}{s} + \int_e^{+\infty} s^{-\theta}\mathcal{K}(s,x;\vec{A})\frac{ds}{s}\right) \leqslant C_2\theta\int_e^{+\infty} s^{-\theta}\mathcal{K}(s,x;\vec{A})\frac{ds}{s}.$$

При этом если $t = e^{\frac{1}{\theta}}$, то

$$\begin{aligned}
\theta\int_e^{+\infty} s^{-\theta}\mathcal{K}(s,x;\vec{A})\frac{ds}{s} &= \theta\int_e^{t} s^{-\theta}\mathcal{K}(s,x;\vec{A})\frac{ds}{s} + \theta\sum_{k=1}^{\infty}\int_{t^{2^{k-1}}}^{t^{2^k}} s^{-\theta}\mathcal{K}(s,x;\vec{A})\frac{ds}{s} \\
&\leqslant \theta\mathcal{K}(t,x;\vec{A})\int_e^{t} s^{-\theta}\frac{ds}{s} + \theta\sum_{k=1}^{\infty}\mathcal{K}(t^{2^k},x;\vec{A})\int_{t^{2^{k-1}}}^{t^{2^k}} s^{-\theta}\frac{ds}{s} \\
&\leqslant e^{-\theta}\mathcal{K}(t,x;\vec{A}) + \sum_{k=1}^{\infty} t^{-\theta 2^{k-1}}\mathcal{K}(t^{2^k},x;\vec{A}) \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} e^{1-2^{k-1}}\mathcal{K}(t^{2^k},x;\vec{A}).
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
\left\|\|x\|_{\theta(t),1}\cdot\chi_{(e,+\infty)}(t)\right\|_F &\leqslant C_2\left\|\sum_{k=0}^{\infty} e^{1-2^{k-1}}\mathcal{K}(t^{2^k},x;\vec{A})\right\|_F \leqslant C_2\sum_{k=0}^{\infty} e^{1-2^{k-1}}\left\|\mathcal{K}(t^{2^k},x;\vec{A})\right\|_F \\
&\leqslant C_2\sum_{k=0}^{\infty} e^{1-2^{k-1}}\|S\|^k_{F\to F}\left\|\mathcal{K}(t,x;\vec{A})\right\|_F \leqslant C_3\|x\|_X.
\end{aligned}$$

Доказанная теорема объединяет и обобщает некоторые результаты работ [1, 4–6]. Ее следствиями являются, например, [4, theorem 4.5] (в случае $\tilde{A}_0 = A_0 \subset A_1$), [5, теорема 2] и [6, теорема 2.3].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 17-01-00138 а и № 16-41-630676 р_а) и Министерства образования и науки РФ (проект 5-100).

Литература

1. Jawerth B., Milman M. *Extrapolation Spaces with applications* // Mem. of the Amer. Math. Soc. – 1991. – V. 89. – No. 440. – 82 p.

2. Берг Й., Лёфстрём Й. *Интерполяционные пространства. Введение.* – М.: Мир, 1980. – 264 с.

3. Cwikel M., Jawerth B. and Milman M. *On the fundamental lemma of interpolation theory.* // J. Approx. Theory. – 1990. – V. 60. – No. 1. – P. 70–82.

4. Karadzhov G., Milman M. *Extrapolation theory: new results and applications* // J. Approx. Theory. – 2005. – V. 133. – No. 1. – P. 38–99.

5. Асташкин С. В. *Экстраполяционные функторы на семействе шкал, порожденных вещественным методом интерполяции* // Сиб. матем. журн. – 2005. – Т. 46. – № 2. – С. 264–289.

6. Асташкин С. В., Лыков К. В. *Сильно экстраполяционные пространства и интерполяция* // Сиб. матем. журн. – 2009. – Т. 50. – № 2. – С. 250–266.

EXTRAPOLATION PROPERTIES OF INTERPOLATION SCALES

K.V. Lykov

The paper describes the relationship between interpolation and extrapolation constructs. For some class of interpolation spaces obtained by the real interpolation method, an extrapolation description is presented. It is shown that for such spaces it is possible to replace the $\mathcal{K}$-functional in the interpolation description by a parametrized family of norms of exact interpolation spaces with characteristic functions t^{θ}, $\theta \in (0,1)$ (in particular, by the family of norms of Peetre's spaces).

Keywords: interpolation spaces, interpolation functor, extrapolation spaces, Peetre's spaces, the real interpolation method.

УДК 517.53: 517.947.942

ОБ АНАЛОГЕ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА ДЛЯ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ С $K_{I,S}$- ИЛИ $K_{O,S}$-УСРЕДНЕННОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

А.Н. Малютина[1], К.А. Алипова[2]

1 *nmd@math.tsu.ru*; Национальный исследовательский Томский государственный университет
2 *aka@math.tsu.ru*; Национальный исследовательский Томский государственный университет

В настоящей работе продолжается исследование дифференциальных и экстремальных свойств негомеоморфных отображений с $(K_{I,s}, K_{O,s})$-усредненной характеристикой. В теории плоских квазиконформных отображений для решения экстремальных задач развит и с успехом применяется вариационный метод [2, 3, 9]. Мы предлагаем попытку применить этот классический метод для решения экстремальных задач в классе отображений с s-усредненной характеристикой.

Ключевые слова: отображение с s-усредненной характеристикой, дифференциальные свойства, вариация, экстремальное отображение.

Пусть $f\colon D \to R^n$ — отображение класса $W^1_{n,loc}(D)$. Тогда почти всюду в D определены величины $|\nabla f(x)| = \left(\sum\limits_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$, $J(x,f) = \det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right)$, и если $J(x,f) \geq 0$ почти всюду, тогда определены локальные характеристики $H_I(x,f) = \frac{J(x,f)}{l^n(x,f)}$, $H_O(x,f) = \frac{L^n(x,f)}{J(x,f)}$.

Рассмотрим две ограниченные области D и D^* в евклидовом пространстве R^n, для которых существует отображение $f\colon D \to D^*$, $f(x) = \big(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\big)$ — открытое, непрерывное, удовлетворяющее условиям $f_i(x) \in W^1_{n,loc}(D^*)$, т.е. $\forall x \in D$ существует U-окрестность точки $x \in D$ такая, что $f_j|_U \in W^1_n(U)$, $f^{-1}_{i,j}(x) \in W^1_{n,loc}(D^*)$.

Отображение f называется отображением с $K_{I,s}(D,D^*)$–усредненной характеристикой (с $K_{O,s}(D,D^*)$–усредненной характеристикой), если

$$K_{I,s}(x,f) = \left(\frac{1}{|D|}\int\limits_D \left(\frac{J(x,f)}{l^n(x,f)}\right)^s d\sigma_x\right)^{\frac{1}{s}} \leq K_{I,s}(f), \tag{1}$$